ANALYSE NUMÉRIQUE

Partie 1

Dans ce problème, on se propose d'étudier et d'approcher les solutions de l'*équation de la chaleur.* Il s'agit d'une équation qui décrit l'évolution en temps et en espace de la température à l'intérieur d'un corps conducteur de la chaleur, après un instant initial $t = 0$ où l'on prescrit cette température. Dans tout le problème, le corps conducteur est monodimensionnel et modélisé soit par $\mathbb{R}$ soit par l'adhérence $\bar{I}$ d'un intervalle ouvert borné I de $\mathbb{R}$. La variable d'espace est notée x (donc $x \in \mathbb{R}$ ou $x \in \bar{I}$ suivant le cas). La variable de temps t appartient à $\mathbb{R}_+$. Les constantes physiques sont ramenées à 1.

Dans cette partie préliminaire, ainsi que dans les parties 2 et 3, on se place dans le cas où $x \in \mathbb{R}$. Plus précisément, on cherche une fonction u des deux variables x et t qui représente la température du corps conducteur au point x et à l'instant t, où (x, t) appartient à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

On note $C_b^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues et bornées sur $\mathbb{R}$; pour $v \in C_b^0(\mathbb{R})$, on pose $\|v\|_{C_b^0(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |v(x)|$. De même, on note $C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues et bornées sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et, pour $v \in C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, on pose $\|v\|_{C_b^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)} = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} |v(x,t)|$.

Soit un couple d'intervalles $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}_+$ (ouverts ou fermés, bornés ou non bornés). À toute fonction v définie sur $A \times B$ à valeurs réelles, on associe les fonctions $v_x : B \to \mathbb{R}$ définies par $v_x(t) = v(x, t)$ et les fonctions $v_t : A \to \mathbb{R}$ définies par $v_t(x) = v(x, t)$. On dit que v appartient à $C^{m,n}(A \times B)$ si, pour tout $t \in B$, la fonction v_t est de classe C^m sur A et si, pour tout $x \in A$, la fonction v_x est de classe C^n sur B. On dit que v appartient à $C_b^{m,n}(A \times B)$ si, en outre, v_t est bornée ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre m, uniformément par rapport à t, et v_x est bornée ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n, uniformément par rapport à x.

On cherche une fonction u appartenant à $C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ dont la restriction à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ appartient à $C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ et satisfaisant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \tag{1.1}$$

dite équation de la chaleur, avec la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

où u_0 est une fonction à valeurs réelles continue bornée sur $\mathbb{R}$ donnée.

Dans cette partie 1, *on établit un résultat d'existence et d'unicité pour le problème* ((1.1), (1.2)). *Dans la partie* 2, *on étudie deux schémas d'approximation de ce système. La partie* 3 *est consacrée à des résultats généraux sur les schémas aux différences finies. Enfin, dans la partie* 4, *on examine le cas où la variable d'espace appartient à* $\bar{I}$.

Q.1.1. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

(indication : considérer le carré de cette intégrale).

Q.1.2. Montrer que la fonction

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\,dy \tag{1.3}$$

est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Q.1.3. Montrer que la fonction u_x, où u est donnée par la formule (1.3), est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer de même que la fonction u_t est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $t > 0$.

Q.1.4. Montrer que u vérifie l'équation (1.1).

Q.1.5. i) Montrer que la fonction u peut être prolongée par continuité à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et que son prolongement (toujours noté u) satisfait $u(x,0) = u_0(x)$ (indication : on pourra poser $z = (y-x)/2\sqrt{t}$).

ii) Montrer que u est bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, avec $\|u\|_{C_b^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)} \leq \|u_0\|_{C_b^0(\mathbb{R})}$. En déduire que u est solution du problème ((1.1),(1.2)).

Q.1.6. i) Montrer que si $u_0 \geq 0$ alors $u \geq 0$.

ii) Montrer que si $u_0 \geq 0$ est non identiquement nulle, alors pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x,t) > 0$. Qu'en déduit-on à propos de la propagation de la chaleur quand u_0 est à support compact ?

Q.1.7. On suppose que u_0 est périodique de période $P > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$, u_t est périodique de période P.

Q.1.8. i) Trouver une solution du problème ((1.1), (1.2)) pour la donnée initiale $u_0(x) = \sin(\omega x)$ avec $\omega > 0$ (on pourra chercher u sous la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$).

ii) On suppose que u_0 est périodique de période 2π. Soit $v \in C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, dont la restriction à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ appartient à $C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$, une solution du problème ((1.1),(1.2)) telle que pour tout $t > 0$, v_t est périodique de période 2π. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on note $a_k(t)$ et $b_k(t)$ les coefficients de Fourier de v_t, définis par

$$\begin{cases} a_0(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(x,t)\,dx, \quad a_k(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(x,t)\cos(kx)\,dx \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*, \\ b_k(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(x,t)\sin(kx)\,dx \text{ pour } k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.4}$$

De même, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\tilde{a}_k(t)$ et $\tilde{b}_k(t)$ les coefficients de Fourier de $\frac{d^2 v_t}{dx^2}$.

Montrer que les fonctions $a_k(\cdot)$ et $b_k(\cdot)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer a_k' et b_k' en fonction de $\tilde{a}_k$ et $\tilde{b}_k$. En déduire que, pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $v(x,t)$ peut aussi s'écrire sous la forme :

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k^2 t}\left[\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\right]$$

où $\alpha_k \in \mathbb{R}$ et $\beta_k \in \mathbb{R}$ sont des coefficients que l'on précisera.

iii) En déduire qu'alors $v = u$ où u est la solution donnée par la formule (1.3).

Sous une hypothèse de périodicité sur u_0, on a ainsi démontré l'unicité d'une solution périodique du problème ((1.1),(1.2)). On admettra dans la suite que, pour tout $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R})$, la solution du problème ((1.1),(1.2)) est unique.

Partie 2

On se propose maintenant de calculer des approximations de la solution du problème (1.1), (1.2). Pour cela, on se donne deux nombre réels h et k strictement positifs et on introduit la grille de points $(x_j, t_n) = (jh, nk) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ avec $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le réel h est appelé *pas de discrétisation en espace,* tandis que k est le *pas de discrétisation en temps.* On note

$$\lambda = \frac{k}{h^2}. \tag{2.1}$$

On s'intéressera à des fonctions discrètes $V : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dont on notera la valeur au point (j,n) par V_j^n. On note $D_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ l'ensemble de ces fonctions discrètes. C'est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire usuelles. On note $l^\infty_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ le sous-espace vectoriel des fonctions discrètes bornées, que l'on munit de la norme $\|V\|_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N},\infty} = \sup_{j\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}} |V_j^n|$ (on ne demande pas de démontrer qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel, ni d'une norme sur cet espace). On notera aussi $D_{\mathbb{Z}}$ l'espace vectoriel des fonctions discrètes sur $\mathbb{Z}$. Si V est une telle fonction discrète, sa valeur au point j sera notée V_j. On introduit aussi le sous-espace $l^\infty_{\mathbb{Z}}$ des fonctions discrètes bornées, normé par $\|V\|_{\mathbb{Z},\infty} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |V_j|$. Si V est un élément de $D_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$, on note V^n l'élément de $D_{\mathbb{Z}}$ défini par $(V^n)_j = V_j^n$.

À toute fonction discrète V sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, on associe deux fonctions discrètes sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, notées $\nabla_x V$ et $\bar{\nabla}_x V$, définies par

$$(\nabla_x V)_j^n = \frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{h}, \qquad (\bar{\nabla}_x V)_j^n = \frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{h}. \tag{2.2}$$

On appelle la première quotient aux différences finies progressives en x et la deuxième quotient aux différences finies rétrogrades en x. On définit aussi le quotient aux différences finies progressives en t :

$$(\nabla_t V)_j^n = \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{k}. \tag{2.3}$$

On introduit alors un premier *schéma aux différences finies*

$$\begin{cases} \nabla_t U - \nabla_x \bar{\nabla}_x U = 0, \\ U_j^0 = u_0(x_j) \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $\nabla_x \bar{\nabla}_x$ dénote l'application de $D_{\mathbf{Z}\times\mathbf{N}}$ dans lui-même composée de $\bar{\nabla}_x$ par ∇_x. La deuxième relation est appelée *condition initiale* pour le schéma.

Le but de cette partie est d'étudier le comportement asymptotique des solutions du schéma (2.4) quand les pas de discrétisation tendent vers 0, à λ fixé, et de déterminer à quelles conditions et en quel sens on obtient ainsi des approximations des valeurs de la solution du problème ((1.1),(1.2)) sur les points des grilles correspondantes.

Q.2.1. Montrer que le schéma (2.4) définit une et une seule fonction discrète $U \in D_{\mathbf{Z}\times\mathbf{N}}$.

Q.2.2. On note E_λ l'application de $D_{\mathbf{Z}}$ dans $D_{\mathbf{Z}}$ définie par

$$(E_\lambda V)_j = \lambda V_{j+1} + (1-2\lambda)V_j + \lambda V_{j-1}. \tag{2.5}$$

Montrer que E_λ est une application linéaire qui envoie $l^\infty_{\mathbf{Z}}$ dans lui-même et qu'elle est continue sur cet espace, de norme

$$\|E_\lambda\|_{\mathcal{L}(l^\infty_{\mathbf{Z}}, l^\infty_{\mathbf{Z}})} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \le 1/2, \\ 4\lambda - 1 & \text{si } \lambda > 1/2. \end{cases} \tag{2.6}$$

On dit que le schéma est *stable si*

$$\exists C, \forall n, \qquad \|E_\lambda^n\|_{\mathcal{L}(l^\infty_{\mathbf{Z}}, l^\infty_{\mathbf{Z}})} \le C,$$

où E_λ^n désigne la composition de E_λ avec elle-même n fois.

En déduire que, si $\lambda \le 1/2$, le schéma est stable et qu'alors U appartient à $l^\infty_{\mathbf{Z}\times\mathbf{N}}$ avec

$$\|U\|_{\mathbf{Z}\times\mathbf{N},\infty} \le \|U^0\|_{\mathbf{Z},\infty} \le \|u_0\|_{C_b^0(\mathbf{R})}. \tag{2.7}$$

Q.2.3. Dans cette question, on s'intéresse au cas $\lambda > 1/2$. Considérant la donnée initiale $U_j^0 = (-1)^j$, montrer que U n'appartient pas nécessairement à $l^\infty_{\mathbf{Z}\times\mathbf{N}}$. On dit dans ce cas que le schéma est *instable*.

Q.2.4. Soit v une solution de l'équation (1.1) qui appartient à l'espace $C_b^{4,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$. On note $\bar{V}_j^n = v(x_j, t_n)$. On fixe $\lambda \le 1/2$. Montrer qu'il existe une constante C qui ne dépend que de la dérivée partielle de v d'ordre 4 en x et de la dérivée partielle de v d'ordre 2 en t, telle que

$$\|\nabla_t \bar{V} - \nabla_x \bar{\nabla}_x \bar{V}\|_{\mathbf{Z}\times\mathbf{N},\infty} \le Ch^2. \tag{2.8}$$

La quantité $\|\nabla_t \bar{V} - \nabla_x \bar{\nabla}_x \bar{V}\|_{\mathbf{Z}\times\mathbf{N},\infty}$ est appelée *erreur de cohérence* du schéma (on dit aussi *erreur de consistance*). Comme elle tend vers 0 quand h tend vers 0, on dit que le schéma est *cohérent* avec l'équation de la chaleur (on dit aussi *consistant*).

Q.2.5. On suppose que la solution u du problème ((1.1),(1.2)) appartient à l'espace $C_b^{4,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ et l'on note $\bar{U}_j^n = u(x_j,t_n)$. Fixant $\lambda \le 1/2$, en déduire qu'il existe une constante C telle que pour tout $T>0$,

$$\sup_{j\in\mathbb{Z},n\le\frac{T}{k}} |U_j^n - \bar{U}_j^n| \le CTh^2,$$

(on pourra poser $\varepsilon_j^n = (\nabla_t\bar{U} - \nabla_x\bar{\nabla}_x\bar{U})_j^n$, $Z_j^n = U_j^n - \bar{U}_j^n$ et étudier la fonction discrète Z). *On dit que le schéma est convergent et du deuxième ordre en espace.*

Q.2.6. On considère un second schéma aux différences finies :

$$\begin{cases} \nabla_t U - \nabla_x\bar{\nabla}_x U + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{h^2}{6} - k\Big)(\nabla_x\bar{\nabla}_x)^2 U = 0, \\ U_j^0 = u_0(x_j) \text{ pour tout } j\in\mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.9}$$

où $(\nabla_x\bar{\nabla}_x)^2$ désigne la composition de $\nabla_x\bar{\nabla}_x$ par lui-même.

Écrire la première relation de (2.9) sous la forme $U^{n+1} = E'_\lambda U^n$ pour $n\in\mathbb{N}$, où E'_λ est une application linéaire continue de $l^\infty_{\mathbb{Z}}$ dans lui-même. Montrer que ce schéma est stable pour $\frac{1}{6}\le\lambda\le\frac{2}{3}$.

On peut montrer (mais on ne demande pas de le faire ici) que le schéma (2.9) est convergent d'ordre 4 en espace pour $\frac{1}{6}\le\lambda\le\frac{2}{3}$.

Partie 3

Dans cette partie, on envisage la situation plus générale suivante : on considère des schémas aux différences finies de la forme

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = (EU^n)_j = \displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}} a_p U_{j-p}^n, \\ U_j^0 = u_0(x_j) \text{ pour tout } j\in\mathbb{Z}, \end{cases} \tag{3.1}$$

où les coefficients a_p sont des constantes réelles données qui sont nulles sauf pour un nombre fini de valeurs de p.

On dira que le schéma est *cohérent* avec l'équation de la chaleur (ou, de façon abrégée, cohérent) si, pour toute solution $v\in C_b^{3,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ de l'équation (1.1), on a

$$\sup_{n,j}\Big|(\nabla_t\bar{V})_j^n - \frac{1}{k}\sum_{p\in\mathbb{Z}}(a_p - \delta_{0p})\bar{V}_{j-p}^n\Big| \to 0 \text{ quand } h\to 0, \tag{3.2}$$

où $\bar{V}_j^n = v(x_j,t_n)$, δ_{lm} est le symbole de Kronecker et λ est fixé.

Pour l'étude de la stabilité du schéma, il est utile de considérer dans cette partie 3 *des fonctions discrètes à valeurs complexes.* On conserve pour ces fonctions à valeurs complexes les notations $D_{\mathbb{Z}}$ et $l^\infty_{\mathbb{Z}}$ de la partie 2, en remplaçant les valeurs absolues par des modules.

Si $\mathscr{F}$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel normé de $D_{\mathbf{Z}}$, dont la norme est notée $\|\cdot\|_{\mathscr{F}}$, on dira que le schéma est *stable dans* $\mathscr{F}$ si E envoie $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$ et s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall V \in \mathscr{F}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|E^n V\|_{\mathscr{F}} \leq C\|V\|_{\mathscr{F}}. \tag{3.3}$$

On associe à l'application linéaire E un polynôme trigonométrique

$$P(\xi) = \sum_{p\in\mathbf{Z}} a_p e^{-ip\xi}, \quad \text{où } \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

appelé *polynôme caractéristique* de E.

Q.3.1. Montrer que si

$$\sum_{p\in\mathbf{Z}} a_p = 1, \quad \sum_{p\in\mathbf{Z}} p a_p = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{p\in\mathbf{Z}} p^2 a_p = 2\lambda, \tag{3.5}$$

le schéma (3.1) est cohérent. En déduire qu'alors

$$P(\xi) = e^{-\lambda\xi^2} + o(\xi^2)$$

au voisinage de $\xi = 0$.

Q.3.2. Soit $\tau_+ : D_{\mathbf{Z}} \to D_{\mathbf{Z}}$ la translation $(\tau_+ V)_j = V_{j+1}$. Montrer que si $\mathscr{F}$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $D_{\mathbf{Z}}$ tel que $\tau_+\mathscr{F} = \mathscr{F}$, alors E envoie $\mathscr{F}$ dans lui-même.

Q.3.3. On s'intéresse dans cette question à la stabilité du schéma (3.1) dans le sous-espace

$$l^2_{\mathbf{Z}} = \{V \in D_{\mathbf{Z}}; \|V\|_{\mathbf{Z},2} < +\infty\}, \tag{3.6}$$

muni de la norme

$$\|V\|_{\mathbf{Z},2} = \Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}} |V_j|^2\Big)^{1/2} \tag{3.7}$$

(qui en fait un espace de Hilbert).

À toute fonction discrète V appartenant à $l^2_{\mathbf{Z}}$, on associe une fonction sur $[0, 2\pi]$ à valeurs complexes, qu'on appellera transformée de Fourier de V et que l'on notera $\hat{V}$, définie comme suit. Notant $L^2(0, 2\pi)$ l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions mesurables sur $[0, 2\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont le module est de carré intégrable, muni de la norme $\|g\|_{L^2(0,2\pi)} = \big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\xi)|^2\, d\xi\big)^{1/2}$, on pose

$$\hat{V}(\xi) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} V_j e^{-ij\xi}. \tag{3.8}$$

On admettra que cette série converge dans $L^2(0, 2\pi)$ et que l'application $V \to \hat{V}$ réalise une isométrie de $l^2_{\mathbf{Z}}$ sur $L^2(0, 2\pi)$ (identité de Parseval).

Exprimer $(\widehat{EV})$ en fonction de $\hat{V}$ et en déduire que le schéma (3.1) est stable dans $l^2_{\mathbf{Z}}$ si et seulement si

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad |P(\xi)| \leq 1. \tag{3.9}$$

Application : montrer que le schéma (2.9) est stable dans $l^2_{\mathbf{Z}}$ si et seulement si $\lambda \leq 2/3$.

Q.3.4. Montrer que si le schéma (3.1) est stable dans $l^\infty_{\mathbf{Z}}$, alors nécessairement l'inégalité (3.9) a lieu.

Q.3.5. On dit que le schéma (3.1) est *parabolique au sens de John* si son polynôme caractéristique satisfait

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, 0 < |\xi| \leq \pi, \quad |P(\xi)| < 1. \tag{3.10}$$

i) Montrer qu'il existe des nombres réels a_{np}, nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de p à n fixé, tels que E^n s'écrit sous la forme

$$(E^n V)_j = \sum_{p \in \mathbf{Z}} a_{np} V_{j-p}.$$

Montrer que

$$a_{np} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\xi)^n e^{ip\xi}\, d\xi,$$

et que

$$\|E^n\|_{\mathcal{L}(l^\infty_{\mathbf{Z}}, l^\infty_{\mathbf{Z}})} = \sum_{p \in \mathbf{Z}} |a_{np}|.$$

ii) Montrer que si le schéma est parabolique au sens de John et cohérent, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, |\xi| \leq \pi, \quad |P(\xi)| \leq e^{-c\xi^2}. \tag{3.11}$$

iii) Montrer que dans ce cas, il existe une constante M telle que l'on ait les deux inégalités

$$|a_{np}| \leq \frac{M}{\sqrt{n}} \quad \text{pour } n \neq 0 \text{ et} \quad |a_{np}| \leq \frac{M\sqrt{n}}{p^2} \quad \text{pour } n \neq 0 \text{ et } p \neq 0,$$

En déduire que le schéma est stable dans $l^\infty_{\mathbf{Z}}$. Application : montrer que le schéma (2.9) est aussi stable dans $l^\infty_{\mathbf{Z}}$ pour $\lambda < 1/6$ (on sait déjà qu'il est stable pour $1/6 \leq \lambda \leq 2/3$).

Q.3.6. On dit que le schéma (3.1) est d'ordre $l > 0$ si pour toute solution v de l'équation (1.1) assez régulière, on a pour λ fixé

$$\sup_{n,j} \left| (\nabla_t \bar{V})^n_j - \frac{1}{k} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (a_p - \delta_{0p}) \bar{V}^n_{j-p} \right| \leq C(v) h^l. \tag{3.12}$$

Soit un schéma d'ordre l et stable dans $l^\infty_{\mathbf{Z}}$. Supposant que la solution u du système ((1.1),(1.2)) est assez régulière pour satisfaire (3.12), montrer que le schéma est convergent et d'ordre l en espace au sens où pour tout $T > 0$,

$$\sup_{j \in \mathbf{Z}, n \leq T/k} |U^n_j - \bar{U}^n_j| \leq CTh^l.$$

Donner une condition suffisante sur les coefficients a_p pour que le schéma soit au moins d'ordre 4.

Partie 4

On s'intéresse maintenant à l'équation de la chaleur sur un intervalle borné $\bar{I}$. Sans perte de généralité, on prendra $I =]0, \pi[$. Il faut compléter le problème par des *conditions aux limites* imposées aux extrémités de cet intervalle. On considérera ici le cas des conditions de Dirichlet qui consistent à imposer une valeur donnée de la température aux extrémités de l'intervalle. Plus précisément, étant donné $u_0 \in C^0([0,\pi])$ telle que $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$, on cherche une fonction $u \in C_b^0(\bar{I} \times \mathbb{R}_+)$ dont la restriction à $I \times \mathbb{R}_+^*$ appartient à $C^{2,1}(I \times \mathbb{R}_+^*)$ et satisfaisant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in I \times \mathbb{R}_+^*, \tag{4.1}$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \bar{I}, \tag{4.2}$$

et les conditions aux limites

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*. \tag{4.3}$$

Pour l'approximation numérique de ce problème, on se donne $k > 0$, $M \in \mathbb{N}^*$ et $h = \pi/(M+1)$. On introduit la grille de points $(x_j, t_n) = (jh, nk) \in \bar{I} \times \mathbb{R}_+$ avec $0 \leq j \leq M+1$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme précédemment, on note $\lambda = k/h^2$. On cherche à définir des schémas aux différences finies qui fournissent des valeurs approchées U_j^n de la valeur exacte de la solution u au point (x_j, t_n), $1 \leq j \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. On notera $U^n = (U_j^n)_{1 \leq j \leq M} \in \mathbb{R}^M$ et $U = (U^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette dernière notation désigne donc une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^M$, ou de façon équivalente, une fonction discrète sur $\{1, \ldots, M\} \times \mathbb{N}$. Toutefois, on attire l'attention des candidats sur le fait que l'entier M *tend vers* $+\infty$ quand le pas de discrétisation en espace h tend vers 0.

Si V désigne une suite $(V^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^M$, on définit les quotients aux différences finies $\nabla_x V$, $\bar{\nabla}_x V$ et leur composition $\nabla_x \bar{\nabla}_x V$ comme à la partie 2, en remplaçant dans le développement de ces expressions V_j^n par 0 pour $j \leq 0$ et pour $j \geq M+1$. On définit de même $\nabla_t V$, ainsi que le quotient aux différences finies rétrogrades en t :

$$(\bar{\nabla}_t V)_j^n = \frac{V_j^n - V_j^{n-1}}{k}, \tag{4.4}$$

pour $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq M$.

On introduit deux schémas aux différences finies, l'un progressif

$$\begin{cases} \left(\nabla_t U_P - \nabla_x \bar{\nabla}_x U_P\right)_j^n = 0 \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } j \in \{1, \ldots, M\}, \\ (U_P)_j^0 = u_0(x_j) \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, M\}, \end{cases} \tag{4.5}$$

l'autre rétrograde

$$\begin{cases} \left(\bar{\nabla}_t U_R - \nabla_x \bar{\nabla}_x U_R\right)_j^n = 0 \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } j \in \{1, \ldots, M\}, \\ (U_R)_j^0 = u_0(x_j) \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, M\}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Q.4.1. Montrer que le problème ((4.1),(4.2),(4.3)) admet une solution (on pourra prolonger u_0 de façon appropriée). On admettra dans la suite du problème que cette solution est unique. Montrer que $u_x(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Q.4.2. Montrer que les schémas (4.5) et (4.6) sont respectivement équivalents à

$$\begin{cases} U_P^{n+1} = A(\lambda)U_P^n, \\ (U_P)_j^0 = u_0(x_j) \text{ pour tout } j \in \{1,\dots,M\}, \end{cases} \tag{4.7}$$

et

$$\begin{cases} B(\lambda)U_R^{n+1} = U_R^n, \\ (U_R)_j^0 = u_0(x_j) \text{ pour tout } j \in \{1,\dots,M\}, \end{cases} \tag{4.8}$$

pour deux matrices carrées $M \times M$ fonctions de λ, $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$, que l'on explicitera. En déduire que ces deux schémas sont bien définis au sens où, pour chaque donnée initiale, ils déterminent chacun une et une seule suite de vecteurs de $\mathbb{R}^M$.

Q.4.3. On munit $\mathbb{R}^M$ de la norme $\|V\|_{h,\infty} = \sup_j |V_j|$. On dit qu'un schéma est stable s'il existe une constante C indépendante de h (on rappelle que $h = \pi/(M+1)$) telle que $\|U^n\|_{h,\infty} \leq C\|U^0\|_{h,\infty}$ pour tout n et toute donnée initiale U^0.

Montrer que le schéma (4.5) est stable si et seulement si $\lambda \leq 1/2$, alors que le schéma (4.6) est stable pour tout λ.

Q.4.4. On suppose que la solution u du problème ((4.1),(4.2),(4.3)) appartient à $C_b^{4,2}(\bar{I} \times \mathbb{R}_+)$ et l'on note $\bar{U}_j^n = u(x_j, t_n)$. Montrer qu'il existe une constante C ne dépendant que de u telle que pour tout $T > 0$,

$$\sup_{1 \leq j \leq M, n \leq \frac{T}{k}} |(U_P)_j^n - \bar{U}_j^n| \leq CTh^2,$$

si $\lambda \leq 1/2$ d'une part, et

$$\sup_{1 \leq j \leq M, n \leq \frac{T}{k}} |(U_R)_j^n - \bar{U}_j^n| \leq CT(k + h^2),$$

quel que soit λ fixé, d'autre part.

Quels sont les avantages et les inconvénients comparés des schémas (4.5) et (4.6) ?

Q.4.5. Pour concilier les impératifs de précision et de faible coût de calcul, on introduit le schéma suivant

$$\begin{cases} (\nabla_t U)_j^n - \frac{1}{2}[\nabla_x \bar{\nabla}_x (U^n + U^{n+1})]_j = 0 \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } j \in \{1,\dots,M\}, \\ U_j^0 = u_0(x_j) \text{ pour tout } j \in \{1,\dots,M\}, \end{cases} \tag{4.9}$$

où l'on appliqué l'opérateur $\nabla_x \bar{\nabla}_x$ comme indiqué dans l'introduction de la partie 4.

i) Montrer que ce schéma se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} B(\lambda/2)U^{n+1} = A(\lambda/2)U^n, \\ U_j^0 = u_0(x_j) \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, M\}. \end{cases} \tag{4.10}$$

ii) Montrer que son erreur de cohérence satisfait

$$\sup_{j,n} |(\nabla_t \bar{V})_j^n - \frac{1}{2}[\nabla_x \bar{\nabla}_x (\bar{V}^n + \bar{V}^{n+1})]_j| \leq C(v)(k^2 + h^2), \tag{4.11}$$

avec les notations habituelles (v solution de (4.1) appartenant à $C_b^{4,3}(\bar{I} \times \mathbb{R}_+)$).

Q.4.6. La question de la stabilité du schéma (4.9) est plus délicate. Pour l'étudier, on commence par noter $U_j^{n+1/2} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_j^{n+1})$, de telle sorte que le schéma devient

$$\begin{cases} (\nabla_t U)_j^n = (\nabla_x \bar{\nabla}_x U^{n+1/2})_j \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } j \in \{1, \dots, M\}, \\ U_j^0 = u_0(x_j) \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, M\}. \end{cases} \tag{4.12}$$

On munit $\mathbb{R}^M$ du produit scalaire euclidien usuel $(W, Z)_h = \sum_{j=1}^M W_j Z_j$ et l'on note $\|W\|_{h,2} = \sqrt{(W, W)_h}$ la norme associée.

i) Établir la formule de sommation par parties

$$\forall W, Z \in \mathbb{R}^M, \qquad (\nabla_x \bar{\nabla}_x W, Z)_h = -(\bar{\nabla}_x W, \bar{\nabla}_x Z)_h - \frac{1}{h^2} W_M Z_M.$$

ii) Montrer que

$$\forall W \in \mathbb{R}^M, \qquad \|W\|_{h,\infty} \leq \sqrt{h\pi} \|\bar{\nabla}_x W\|_{h,2}.$$

iii) Montrer que la suite $\left(\|\bar{\nabla}_x U^n\|_{h,2}^2 + \frac{(U_M^n)^2}{h^2}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante. Supposant que u_0 est de classe C^1, en déduire que

$$\|U^n\|_{h,\infty} \leq \pi \|u_0'\|_{C^0([0,\pi])}.$$

iv) Supposant que la solution u du problème ((4.1),(4.2),(4.3)) appartient à l'espace $C_b^{4,3}(\bar{I} \times \mathbb{R}_+)$, montrer qu'il existe une constante $C(u)$ ne dépendant que de u telle que

$$\|U^n - \bar{U}^n\|_{h,\infty} \leq C(u)\sqrt{T}(h^2 + k^2)$$

pour $nk \leq T$. Quels sont les avantages du schéma (4.9) ?

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

INTRODUCTION

L'espace $\mathbb{R}^m$ est muni de son produit scalaire standard défini par $x \cdot y := \sum_{k=1}^{m} x_k y_k$, quand $x = (x_1, ..., x_m)$ et $y = (y_1, ..., y_m)$. La norme euclidienne associée est $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$.

On fixe une fonction $V \in C^3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, c'est-à-dire : V est trois fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^m$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La différentielle d'une application est désignée par la lettre D.

Si $x \in \mathbb{R}^m$, le gradient de V en x par rapport au produit scalaire standard de $\mathbb{R}^m$ est noté : $\nabla V(x)$.

Nous étudions ici une équation différentielle du second ordre de la forme :

$(\mathcal{N}_{\delta,e})$ $\qquad \ddot{q}(t) - \delta\dot{q}(t) + \nabla V(q(t)) = e(t)$

où $\delta \in \mathbb{R}$, et où e est une fonction continue définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.
Cette équation représente une équation de mouvement en présence d'une force extérieure $e(t)$ et d'un terme $\delta\dot{x}(t)$ qui peut exprimer un amortissement ou une amplification selon le signe de δ.
Dans la première partie, nous étudions une fonctionnelle d'action pour établir un principe de Maupertuis associé à cette équation. Dans la deuxième partie, nous étudions certaines propriétés des solutions de cette équation. Dans les

parties troisième et quatrième, nous étudions des branches de trajectoires périodiques.

Si $t_0 < t_1$ sont deux nombres réels, l'espace des fonctions continues de l'intervalle $[t_0, t_1]$ dans $\mathbb{R}^m$ est noté $C^0([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$, et est muni de la norme

$$\|\varphi\|_\infty := \sup\{\|\varphi(t)\| : t \in [t_0, t_1]\}$$

L'espace des fonctions continûment dérivables de $[t_0, t_1]$ dans $\mathbb{R}^m$ est noté $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$, et est muni de la norme

$$\|\varphi\|_{C^1} = \|\varphi\|_\infty + \|\dot{\varphi}\|_\infty, \quad \text{où } \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

L'espace des fonctions deux fois continûment dérivables de $[t_0, t_1]$ dans $\mathbb{R}^m$ est noté $C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$, et est muni de la norme

$$\|\varphi\|_{C^2} = \|\varphi\|_\infty + \|\dot{\varphi}\|_\infty + \|\ddot{\varphi}\|_\infty, \quad \text{où } \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Rappelons que ces trois espaces vectoriels normés de fonctions sont des espaces de Banach.

PARTIE I

Dans cette partie, on fixe $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, $\eta_0 \in \mathbb{R}^m$ et $\eta_1 \in \mathbb{R}^m$.
On définit les ensembles de fonctions suivants :

$$\mathcal{A} := \{q \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m) : q(t_0) = \eta_0,\ q(t_1) = \eta_1\},$$

et

$$\mathcal{B} := \{h \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m) : h(t_0) = h(t_1) = 0\}.$$

En d'autres termes, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des arcs paramétrés continûment dérivables qui joignent deux points fixés de $\mathbb{R}^m$, et $\mathcal{B}$ est un ensemble d'arcs paramétrés fermés.

On fixe une fonction continue $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, et on fixe $\delta \in \mathbb{R}$.

On considère la fonctionnelle :

$$J : C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$J(q) := \int_{t_0}^{t_1} \exp(-\delta t) \left(\frac{1}{2} \|\dot{q}(t)\|^2 - V(q(t)) + q(t) \cdot e(t) \right) dt.$$

On considère aussi les opérateurs (= applications)

$$in : C^1([t_0, t_1], I\!R^m) \longrightarrow C^0([t_0, t_1], I\!R^m)$$

et

$$\frac{d}{dt} : C^1([t_0, t_1], I\!R^m) \longrightarrow C^0([t_0, t_1], I\!R^m)$$

définis par

$$in(q) := q, \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(q) := \dot{q}.$$

1/ Démontrer que les applications in et $\frac{d}{dt}$ sont différentiables sur l'espace $C^1([t_0, t_1], I\!R^m)$, et calculer leur différentielles.

2/ On considère la fonctionnelle

$$B : C^0([t_0, t_1], I\!R^m) \times C^0([t_0, t_1], I\!R^m) \longrightarrow I\!R$$

définie par :

$$B(x, y) := \int_{t_0}^{t_1} \exp(-\delta t)(x(t) \cdot y(t)) dt,$$

et la fonctionnelle

$$J_1 : C^1([t_0, t_1], I\!R^m) \longrightarrow I\!R$$

définie par

$$J_1(q) := \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \exp(-\delta t) \|\dot{q}(t)\|^2 dt.$$

2.1 Démontrer que B est bilinéaire continue.

2.2 Déduire de (2.1) que J_1 est différentiable sur $C^1([t_0, t_1], I\!R^m)$, et calculer sa différentielle.

2.3 Démontrer que pour toutes $q, h \in C^1([t_0, t_1], I\!R^m)$, on a :

$$\frac{d}{d\theta} J_1(q + \theta h)_{|\theta=0} = \int_{t_0}^{t_1} \exp(-\delta t)(\dot{q}(t) \cdot \dot{h}(t)) dt.$$

3/ On considère la fonctionnelle

$$J_3 : C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$J_3(q) := \int_{t_0}^{t_1} \exp(-\delta t)(q(t) \cdot e(t))dt.$$

3.1 Démontrer que J_3 est différentiable sur $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$, et calculer sa différentielle.

3.2 Démontrer que pour toutes $q, h \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$, on a :

$$\frac{d}{d\theta} J_3(q + \theta h)_{|\theta=0} = \int_{t_0}^{t_1} \exp(-\delta t)(h(t) \cdot e(t))dt.$$

4/ On considère la fonctionnelle

$$J_2 : C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$J_2(q) := \int_{t_0}^{t_1} \exp(-\delta t)V(q(t))dt.$$

4.1 Démontrer que pour toutes $q, h \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$, on a :

$$\frac{d}{d\theta} J_2(q + \theta h)_{|\theta=0} = \int_{t_0}^{t_1} \exp(-\delta t)(\nabla V(q(t)) \cdot h(t))dt.$$

4.2 Fixons $q \in C^0([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ et $\varepsilon > 0$.
Démontrer qu'il existe un nombre réel $\alpha = \alpha(q, \varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^m$ et pour tout $t \in [t_0, t_1]$,

$$\text{si } \|\zeta - q(t)\| \leq \alpha \text{ alors } \|\nabla V(q(t)) - \nabla V(\zeta)\| \leq \varepsilon.$$

4.3 Fixons $q \in C^0([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ et $\varepsilon > 0$.
Démontrer qu'il existe un nombre réel $\beta = \beta(q, \varepsilon) > 0$ tel que, pour

PARTIE III

On fixe $T \in]0, +\infty[$.
On note C_T^0 l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$ qui sont périodiques de période T.
On note C_T^1 (respectivement C_T^2) l'ensemble des fonctions de C_T^0 qui sont continûment dérivables (respectivement deux fois continûment dérivables).
L'espace C_T^0 est muni de la norme

$$\|\varphi\|_\infty := \sup\{\|\varphi(t)\| : t \in \mathbb{R}\},$$

l'espace C_T^1 est muni de la norme

$$\|\varphi\|_{C^1} = \|\varphi\|_\infty + \|\dot{\varphi}\|_\infty,$$

et l'espace C_T^2 est muni de la norme

$$\|\varphi\|_{C^2} = \|\varphi\|_\infty + \|\dot{\varphi}\|_\infty + \|\ddot{\varphi}\|_\infty.$$

Rappelons que ces trois espaces munis des normes pré-citées sont des espaces de Banach.

On fixe $q_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que $\nabla V(q_0) = 0$, et tel que la différentielle seconde $D^2V(q_0)$ soit inversible.

On considère l'équation différentielle :

$(\mathcal{L}_{\delta,h})$ $\qquad \ddot{x}(t) - \delta\dot{x}(t) + D^2V(q_0)x(t) = h(t).$

On considère l'opérateur :

$$\Phi : C_T^2 \times \mathbb{R} \times C_T^0 \longrightarrow C_T^0$$

défini par :

$$\Phi(q, \delta, e) := \ddot{q} - \delta\dot{q} + \nabla V \circ q - e.$$

Lorsqu'elles existent, nous noterons $D_1\Phi(q, \delta, e)$ (respectivement $D_2\Phi(q, \delta, e)$, respectivement $D_3\Phi(q, \delta, e)$) la différentielle de l'application partielle $\Phi(\cdot, \delta, e)$ (respectivement $\Phi(q, \cdot, e)$, respectivement $\Phi(q, \delta, \cdot)$) au point q (respectivement δ, respectivement e).

1/ Expliciter la relation entre les solutions périodiques de période T de $(\mathcal{N}_{\delta,e})$ (équation définie à la question (6.3) de la Partie I) et l'opérateur Φ.

2/ 2.1 Démontrer que $D_1\Phi(q,\delta,e)$ existe en chaque point (q,δ,e) de l'espace $C^2_T \times \mathbb{R} \times C^0_T$, et que l'application $D_1\Phi$ est continue sur $C^2_T \times \mathbb{R} \times C^0_T$. *(Indication : on utilisera une démarche similaire à celle de la question 4 de la Partie I.)*

2.2 Démontrer que $D_2\Phi(q,\delta,e)$ existe en chaque point (q,δ,e) de l'espace $C^2_T \times \mathbb{R} \times C^0_T$, et que l'application $D_2\Phi$ est continue sur $C^2_T \times \mathbb{R} \times C^0_T$.

2.3 Démontrer que $D_3\Phi(q,\delta,e)$ existe en chaque point (q,δ,e) de l'espace $C^2_T \times \mathbb{R} \times C^0_T$, et que l'application $D_3\Phi$ est continue sur $C^2_T \times \mathbb{R} \times C^0_T$.

3/ Démontrer que Φ est continûment différentiable sur $C^2_T \times \mathbb{R} \times C^0_T$.

4/ Expliciter la relation entre Φ et les solutions périodiques de période T de $(\mathcal{L}_{\delta,h})$.

5/ Soit $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Rappelons que l'équation adjointe à l'équation $\dot{z}(t) = Mz(t)$ est l'équation $\dot{w}(t) = -M^T w(t)$, où M^T est la transposée de M.

5.1 Écrire $(\mathcal{L}_{\delta,0})$ sous forme d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

5.2 Écrire l'équation adjointe à l'équation du premier ordre équivalente à $(\mathcal{L}_{\delta,0})$, puis écrire cette équation adjointe sous forme d'une équation différentielle du second ordre.

6/ Soit $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On note $t \longmapsto X(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ la résolvante de l'équation $\dot{z}(t) = Mz(t)$, c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dot{X}(t) = MX(t)$, et $X(0) = I_n$ l'identité de $\mathbb{R}^n$.

6.1 Démontrer que $Y(t) := (X(t)^{-1})^T$ est la résolvante de l'équation adjointe $\dot{w}(t) = -M^T w(t)$.

6.2 Soit $e \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $w(.)$ solution T-périodique de l'équation adjointe $\dot{w}(t) = -M^T w(t)$ telle que $w(0) = e$.
(ii) $e \in \mathrm{Ker}(X(T)^{-1} - I_n)^T$.

6.3 Soit $b \in C^0_T$. Démontrer que l'équation $\dot{z}(t) = Mz(t) + b(t)$ possède une solution T-périodique si et seulement si il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$(X(T)^{-1} - I_n)x_0 = \int_0^T X(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau.$$

6.4 Soit $b \in C^0_T$. On note $\beta := \int_0^T X(\tau)^{-1} b(\tau) d\tau$. Démontrer que l'équation $\dot{z}(t) = Mz(t) + b(t)$ possède une solution T-périodique si et seulement si pour toute $w(.)$ solution T-périodique de l'équation adjointe $\dot{w}(t) = -M^T w(t)$, on a :

$$\int_0^T b(t) \cdot w(t) dt = 0.$$

7/ Démontrer que $D_1\Phi(q_0, \delta, 0)$ est bijective.
(Indication : on pourra utiliser la question 3 de la Partie II.)

8/ On fixe $\delta_0 \neq 0$. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $|\delta - \delta_0| < \varepsilon$, et pour tout $e \in C^0_T$ telle que $\|e\|_\infty < \varepsilon$, il existe $q_{\delta,e} \in C^2_T$ telle que $q_{\delta,e}$ est solution de $(\mathcal{N}_{\delta,e})$ et telle que $q_{\delta,e}$ tend vers q_0 quand δ tend vers δ_0 et e tend vers 0.

PARTIE IV

Dans cette partie nous supposerons que $\nabla V(0) = 0$, que $D^2V(0)$ est inversible et que toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Les valeurs propres distinctes de $D^2V(0)$ sont :

$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \ldots < \omega_r^2.$$

Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, nous considérons :

$$\mathcal{P}^i := \{q \in C^i_{2\pi} : \forall t \in \mathbb{R}, q(-t) = q(t)\}.$$

Nous considérons l'opérateur $F : \mathbb{R} \times C^2_{2\pi} \longrightarrow C^0_{2\pi}$ défini par :

$$F(\omega, q) := \omega^2 \ddot{q} + \nabla V \circ q.$$

Nous noterons aussi F la restriction de cet opérateur de $\mathbb{R} \times \mathcal{P}^2$ dans $\mathcal{P}^0$.

Nous fixons une valeur propre ω_j^2 de $D^2V(0)$ dont la multiplicité est égale à 1.
Nous fixons ξ un vecteur propre de $D^2V(0)$ associé à la valeur propre ω_j^2.
Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$L_k := -\omega_j^2 k^2 I_m + D^2V(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m),$$

où I_m est l'application identité de $\mathbb{R}^m$.

1/ Que représentent pour l'équation $(\mathcal{N}_{0,0})$ les couples (ω, q) qui annulent F ?
(Indication : on pourra considérer la fonction $u(t) = q(t\omega)$.)

2/ Démontrer que F est continûment différentiable et que, pour toute $h \in \mathcal{P}^2$, on a :

$$D_2F(\omega_j, 0).h = \omega_j^2 \ddot{h} + D^2V(0).h,$$

où $D_2F(\omega_j, 0)$ est la différentielle de $F(\omega_j, \cdot)$ au point 0.

3/ Soit $q \in \mathcal{P}^0$. Démontrer que le développement en série de Fourier de q est de la forme : $\sum_{k \geq 0} q_k \cos(kt)$, où les coefficients q_k sont dans $\mathbb{R}^m$.

4/ Démontrer qu'il existe $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{Ker}\ell = \mathrm{Im}\ L_1$, et $\ell(\xi) = 1$.

5/ Soit $u \in \mathcal{P}^2$ et $v \in \mathcal{P}^0$ telles que $D_2F(\omega_j, 0).u = v$.
On note $\sum_{k \geq 0} u_k \cos(kt)$ la série de Fourier de u, et $\sum_{k \geq 0} v_k \cos(kt)$ la série de Fourier de v.
Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $L_k(u_k) = v_k$.

6/ Démontrer que $\mathrm{Ker}D_2F(\omega_j, 0)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}^2$ engendré par la fonction $q_* := [t \longmapsto (\cos t)\xi)]$.

7/ Soit $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, soit $k_0 \in \mathbb{N}_* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $k_0^2 > \|B\|_{\mathcal{L}}$, où $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ est la norme des applications linéaires.
Pour tout $k \in \mathbb{N}_*$ on pose :

$$B_k := (-k^2 I_m + B).$$

Pour tout entier $k \geq k_0$, on pose :

$$C_k := B_k^{-1} + \frac{1}{k^2} I_m.$$

Soit $x \in \mathcal{P}^0$ et soit $\sum_{k \geq 0} x_k \cos(kt)$ la série de Fourier de x.

7.1 Démontrer qu'il existe $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que, pour tout entier $k \geq k_0$, on a :

$$\|C_k\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha \frac{1}{k^4}.$$

7.2 Démontrer que $\sum_{k \geq k_0} C_k(x_k) \cos(kt)$ est la série de Fourier d'une fonction élément de $\mathcal{P}^2$.

7.3 Démontrer que $\sum_{k \geq k_0} \frac{1}{k^2} x_k \cos(kt)$ est la série de Fourier d'une fonction élément de $\mathcal{P}^2$.
(Indication : on pourra démontrer que toute fonction paire (respectivement impaire) continue périodique de moyenne nulle admet une primitive périodique impaire (respectivement paire) de moyenne nulle.)

(NR) Nous fixons $k_0 \in \mathbb{N}_*$ tel que $k_0^2 > \frac{1}{\omega_j^2} \|D^2V(0)\|_{\mathcal{L}}$, et nous supposons que, pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq k_0 - 1$, $\omega_j^2 k^2$ n'est pas valeur propre de $D^2V(0)$.

8/ On définit l'application linéaire $Q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ par $Q(x) := \ell(x)\xi$, où ℓ est fournie par la question (4).
Démontrer que :

$$\mathrm{Im} D_2 F(\omega_j, 0) = \{v \in \mathcal{P}^0 : Q\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t) \cos t dt\right) = 0\}.$$

9/ On note $S_1 := \mathrm{Ker} D_2F(\omega_j, 0)$ et S_2 un sous-espace vectoriel fermé supplémentaire de S_1 dans $\mathcal{P}^2$. Ainsi on a :

$$\mathcal{P}^2 = S_1 \oplus S_2 \equiv S_1 \times S_2,$$

ce qui signifie que l'application $(s_1, s_2) \longmapsto s_1 + s_2$, de $S_1 \times S_2$ dans $\mathcal{P}^2$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels qui est bi-continu.

On note $W_1 := \mathrm{Im} D_2F(\omega_j, 0)$ et W_2 un sous-espace vectoriel fermé supplémentaire de W_1 dans $\mathcal{P}^0$. Ainsi on a :

$$\mathcal{P}^0 = W_1 \oplus W_2 \equiv W_1 \times W_2,$$

ce qui signifie que l'application $(w_1, w_2) \longmapsto w_1 + w_2$, de $W_1 \times W_2$ dans $\mathcal{P}^0$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels qui est bi-continu.

On note $F(\omega, q) = (F_1(\omega, q), F_2(\omega, q)) \in W_1 \times W_2$.

9.1 Démontrer qu'il existe un voisinage Ω de ω_j dans $\mathbb{R}$, un voisinage R_1 de 0 dans S_1, un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage R_2 de 0 dans S_2, et une fonction continûment différentiable $\varphi : \Omega \times R_1 \longrightarrow R_2$ tels que, pour tout $(\omega, \theta, q_2) \in \Omega \times R_1 \times R_2$, on a :

$$F_1(\omega, (\theta q_*, q_2)) = 0 \Longleftrightarrow q_2 = \varphi(\omega, \theta q_*),$$

où q_* provient de la question (6).

9.2 Démontrer qu'il existe une forme linéaire continue Λ sur $\mathcal{P}^0$ telle que, pour tout $(\omega, \theta) \in \Omega \times I$, on a :

$$\Lambda(F(\omega, (\theta q_*, \varphi(\omega, \theta q_*)))) = 0 \Longrightarrow F(\omega, (\theta q_*, \varphi(\omega, \theta q_*)) = 0.$$

10/ On admettra que l'application F est deux fois continûment différentiable.

On définit la fonction $f : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(\omega, \theta) := \Lambda(F(\omega, (\theta q_*, \varphi(\omega, \theta q_*)))).$$

10.1 Démontrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $f(\omega, 0) = 0$.

10.2 Démontrer que :

$$\begin{aligned} D_1 f(\omega_j, 0) &= 0 \\ D^2_{1,1} f(\omega_j, 0) &= 0 \\ D_2 f(\omega_j, 0) &= 0 \\ D^2_{2,1} f(\omega_j, 0) &= \Lambda(D^2_{2,1} F(\omega_j, 0).q_*) \end{aligned}$$

où $D_1 f$ et $D_2 f$ désignent respectivement les différentielles partielles du premier ordre par rapport à la première et par rapport à la deuxième variable de f, où $D^2_{1,1} f$ désigne la différentielle partielle seconde par rapport à la première variable de f, et où $D^2_{2,1} f$ désigne la différentielle partielle du second ordre, une fois par rapport à la première variable, une fois par rapport à la seconde variable, de f.

11/ On suppose que $D^2_{2,1} F(\omega_j, 0).q_* \notin W_1$.
On définit la fonction $g : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g(\omega, \theta) := \begin{cases} \frac{f(\omega,\theta)}{\theta} & \text{si } \theta \in I \setminus \{0\} \\ D_2 f(\omega, \theta) & \text{si } \theta = 0. \end{cases}$$

11.1 Démontrer que g est continûment différentiable.

11.2 Démontrer que $g(\omega_j, 0) = 0$ et que $D_1 g(\omega_j, 0) \neq 0$.

12/ Déduire de la question précédente l'existence d'une branche $\theta \longmapsto q_\theta$ de solutions périodiques (non nulles quand $\theta \neq 0$) de l'équation $(\mathcal{N}_{0,0})$ définie pour les nombres réels voisins de 0.

Probabilités et Statistiques

Propriétés, Notations, Définitions, Rappels.

Dans la suite n, p, q ou q' désigneront des nombres entiers naturels non nuls.

1. Dans tout le problème les variables aléatoires (notées de manière abrégée v.a., on notera aussi v.a.r. pour des variables aléatoires réelles) sont définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, un espace probabilisé tel que si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, il existe une v.a. X' de même loi que X et indépendante de X; on note alors $\mathbb{P}_X$ la loi du vecteur aléatoire X.

2. L'espérance d'une variable aléatoire réelle ou vectorielle Z est notée $\mathbb{E}Z$ lorsqu'elle peut être définie. On note L^p l'espace des classes de v.a.r. (presque sûrement égales) X définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telles que $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Soient X, Y deux v.a.r. de carré intégrable, on définit leur covariance par $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On définit aussi la variance de X par $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X,X)$.

3. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des parties boréliennes de $\mathbb{R}^p$.

4. On admettra qu'une loi P quelconque sur $\mathbb{R}^p$ est intérieurement régulière: pour tout borélien B de $\mathbb{R}^p$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K inclus dans B tel que $P(K) > P(B) - \epsilon$.

5. On rappelle l'énoncé du théorème de Fubini pour une fonction positive. Soit $(E_i, \mathcal{E}_i, m_i)$, $i = 1, 2$, un couple d'espaces mesurés, et soit f une fonction numérique positive et mesurable sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$, alors les applications

$$f_1 : x_1 \to \int_{E_2} f(x_1, x_2) m_2(dx_2), \qquad f_2 : x_2 \to \int_{E_1} f(x_1, x_2) m_1(dx_1)$$

sont mesurables et de plus

$$\int_{E_1 \times E_2} f dm_1 \otimes m_2 = \int_{E_1} f_1 dm_1 = \int_{E_2} f_2 dm_2$$

6. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^p} |f(x)|$. Soit $C(\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}^p$, on note $C_b(\mathbb{R}^p)$ le sous ensemble de $C(\mathbb{R}^p)$ formé des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^p$. De plus $C^n(\mathbb{R}^p)$ (resp. $C_b^n(\mathbb{R}^p)$) désigne pour tout entier $n \geq 1$ le sous ensemble de $C(\mathbb{R}^p)$) (resp. de $C_b(\mathbb{R}^p)$) formé des fonctions dont toutes les dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre n et sont dans $C(\mathbb{R}^p)$ (resp. $C_b(\mathbb{R}^p)$).

7. On admettra qu'un couple de variable aléatoires (X, Y) de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ est indépendant si et seulement si $\mathrm{Cov}(f(X), g(Y)) = 0$ pour toutes fonctions f et g de $C_b^1(\mathbb{R}^p)$ et $C_b^1(\mathbb{R}^q)$.

8. On note $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et croissantes par rapport à chaque coordonnée, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et tout entier $j \in [1, p]$, l'application $f_{x,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, où l'on a posé $f_{x,j}(t) = f(x_1, ..., x_{j-1}, t, x_{j+1}, ..., x_p)$ si $x = (x_1, ..., x_p)$.

9. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on note $x \geq y$ (resp. $x > y$) si $x_i \geq y_i$ (resp. $x_i > y_i$) pour tout entier $1 \leq i \leq p$. Rappelons que cet ordre n'est pas total.
10. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions indicatrices d'ensembles fermés de $\mathbb{R}^p$ (i.e. $f(x) = 1$ pour $x \in A$ et $f(x) = 0$ pour $x \notin A$, si A est fermé dans $\mathbb{R}^p$: on posera $f = \mathbb{1}_A$), ces fonctions sont dites simples sur $\mathbb{R}^p$. On note, de plus, $\mathcal{M}_c(\mathbb{R}^p) = C_b(\mathbb{R}^p) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$ et $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^p) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^p) \cap \mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$.

Le vecteur aléatoire X de $\mathbb{R}^p$ est dit associé si pour tout couple de fonctions (f, g) de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$,

$$\mathbb{E}(f^2(X) + g^2(X)) < \infty \Rightarrow \mathrm{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0. \tag{1}$$

De façon plus générale, la suite de variables aléatoires réelles $X = (X_n)_{n\geq 0}$ est dite associée si, pour tout nombre entier p, le vecteur aléatoire $(X_0, ..., X_{p-1})$ de $\mathbb{R}^p$ est associé.

L'objet du problème est l'étude de telles suites. Les résultats prouvés dans les préliminaires sont utiles dans toute la suite. Les parties I et II sont essentiellement indépendantes, les résultats de la partie IV reposent sur ceux de la partie III.

Préliminaires.

1. Soient X et Y des variables aléatoires réelles de carré intégrable et positives.
a) Montrez que

$$\mathbb{E}XY = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x, Y > y) dx dy.$$

b) En déduire que

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty (\mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y)) dx dy.$$

2. Soient X et Y des variables aléatoires réelles quelconques de carré intégrable. Montrer l'identité suivante, dite de *Hoeffding*:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (\mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > y))\, dx dy.$$

3. Soient $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables; on note $f << g$ si $g - f$ et $g + f$ sont dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$.
Soit X un vecteur associé de $\mathbb{R}^p$. Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 des fonctions mesurables telles que $f_1(X), f_2(X), g_1(X)$ et $g_2(X)$ soient de carré intégrable; montrez que si $f_1 << f_2$ et $g_1 << g_2$ alors

$$|\mathrm{Cov}(f_1(X), g_1(X))| \leq \mathrm{Cov}(f_2(X), g_2(X)).$$

4. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles associées de carré intégrable et soient f et g dans $C_b^1(\mathbb{R})$. Montrez que

$$|\mathrm{Cov}(f(X),g(Y)))| \leq \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \mathrm{Cov}(X,Y).$$

5. Plus généralement, soient $X=(X_1,...,X_p)$ et $Y=(Y_1,...,Y_q)$ des vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ dont les composantes sont de carré intégrable et tels que le vecteur (X,Y) soit associé. Soient f et g deux fonctions numériques dans $C_b^1(\mathbb{R}^p)$ et $C_b^1(\mathbb{R}^q)$ respectivement. Montrez qu'il existe une constante $C>0$ ne dépendant que de f et de g telle que

$$|\mathrm{Cov}(f(X),g(Y)))| \leq C\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\mathrm{Cov}(X_i,Y_j).$$

Partie I.
Association et indépendance

1. Soit X une variable aléatoire réelle quelconque.
a) Soient f et g des fonctions mesurables telles que $f(X)$ et $g(X)$ soient des variables de carré intégrable. Soit X' une v.a.r. indépendante de X et de même loi que X, montrez que

$$\mathrm{Cov}(f(X),g(X)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(f(X)-f(X'))(g(X)-g(X')).$$

b) Montrez que X est une variable aléatoire associée.

2. Soient $X\in\mathbb{R}^p$ et $Y\in\mathbb{R}^q$ des variables aléatoires vectorielles associées, indépendantes.
a) Soient$f$ et g des éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{p+q})$. On suppose que $f(Z)$ et $g(Z)$ sont de carré intégrable. On pose $F(x)=\mathbb{E}(f(x,Y))$ et $G(x)=\mathbb{E}(g(x,Y))$. On note $Z=(X,Y)$, montrez que

$$\mathrm{Cov}(f(Z),g(Z)) = \int_{\mathbb{R}^p}\mathrm{Cov}(f(x,Y),g(x,Y))\mathbb{P}_X(dx) + \mathrm{Cov}(F(X),G(X)).$$

b) En déduire que le vecteur aléatoire (X,Y) est associé dans $\mathbb{R}^{p+q}$.

3. Soient $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes; prouvez que $(X_1,...,X_n)$ est un vecteur aléatoire associé.

On se propose de montrer que si les coordonnées d'un vecteur aléatoire associé sont non corrélées alors elles sont indépendantes.

4. Soient $X = (X_1, ..., X_p) \in \mathbb{R}^p$ et $Y = (Y_1, ..., Y_q) \in \mathbb{R}^q$ des variables aléatoires telles que la v.a. (X, Y) soit associée. On suppose que $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0$ pour tout couple (i, j) d'entiers de $[1, p] \times [1, q]$. Prouvez que les v.a. X et Y sont indépendantes (on pourra utiliser la propriété **7**).

5. Soit $X = (X_1, ..., X_p)$ une v.a. associée de $\mathbb{R}^p$. On suppose que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $[1, p]$. Prouvez que les coordonnées de la v.a. X sont des v.a.r. indépendantes.

6. Donnez un exemple de vecteur aléatoire (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ et dont les coordonnées ne sont pas indépendantes. Existe-t-il un vecteur aléatoire gaussien ou associé de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont non corrélées et non indépendantes ?

Partie II.
Association et convergence en loi
A.

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$. On se propose de montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(i) La relation (1) vaut pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{M}_c(\mathbb{R}^p)$.

(ii) La relation (1) vaut pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^p)$.

(iii) Le vecteur X de $\mathbb{R}^p$ est associé.

1. Soit $f = \mathbb{1}_A$ un élément quelconque de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^p)$ on pose

$$f_n(x) = \int_{[0,1]^p} f(x + n^{-1}u)du.$$

a) Montrez que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{M}_c(\mathbb{R}^p)$, décroissante, et que cette suite de fonctions converge simplement vers f.
b) En déduire que (i) implique (ii).

2. Montrez que X est associé si et seulement si la relation (1) est satisfaite pour tous les couples (f, g) de fonctions croissantes indicatrices d'ensembles (on pourra utiliser l'identité de Hoeffding).

3. Soit $f = \mathbb{1}_A$ un élément de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^p)$ et K un compact inclus dans A. Montrez qu'il existe un fermé F tel que

$$K \subset F \subset A \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_F \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^p).$$

4. En utilisant la régularité intérieure de la loi $\mathbb{P}_X$ du vecteur X (propriété 4), en déduire que (ii) implique (iii). Conclure.

B.

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est limite de suites associées, c'est à dire qu'il existe des suites associées $(X_{K,n})_{n\geq 0}$, avec K décrivant $\mathbb{N}$, telles que pour tout entier p la suite de vecteurs $(X_{K,0}, ..., X_{K,p})$ converge en loi vers $(X_0, ..., X_p)$ lorsque K converge vers l'infini. Montrez qu'alors la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est encore associée.

2. Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi; on suppose que $\mathbb{E}\xi_0 = 0$ et $\mathbb{E}\xi_0^2 = 1$. Soit, de plus, $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

a) Soit $X_{K,n} = \sum_{k=0}^{K} a_k \xi_{n-k}$. Montrez que pour tout entier $n \geq 0$, la suite $(X_{K,n})_{K\geq 0}$ converge dans L^2 vers une variable aléatoire X_n.

b) Montrez que si, de plus, $a_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 0$, alors la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ définie ci-dessus est associée.

Partie III.
Inégalités de moments

Soient $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite associée et stationnaire (i.e. pour tout couple (n,k) d'entiers positifs, les vecteurs $(Y_0, ..., Y_n)$ et $(Y_p, ..., Y_{n+p})$ ont la même loi). Soit T dans $C_b^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{E}T(Y_0) = 0$. On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$X_n = T(Y_n) \qquad \text{et} \qquad S_n = X_1 + ... + X_n.$$

Soit p un entier positif quelconque, on note aussi

$$M_{n,p} = \mathbb{E}S_n^p, \quad A_{n,p} = \sum_{1\leq i_1\leq ...\leq i_p\leq n} |\mathbb{E}X_{i_1}...X_{i_p}|, \quad \text{et} \quad \rho(k) = \sup\{\mathrm{Cov}(Y_0, Y_p); |p| \geq k\}.$$

1. Prouvez que $M_{n,p} \leq p! A_{n,p}$.

Soient $p \geq 2$ un entier, on note $c_{r,p}$ la borne supérieure des expressions

$$|\mathrm{Cov}(X_{i_1}...X_{i_m}, X_{i_{m+1}}...X_{i_p})|$$

lorsque l'entier m décrit l'intervalle $[1, p[$ et les indices $(i_1, ..., i_p)$ vérifient $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p$ et $i_{m+1} - i_m = r$.

2. Prouvez que

$$c_{r,p} \leq \frac{p^2}{4}\|T\|_\infty^{p-2}\|T'\|_\infty^2 \rho(r).$$

Pour tout entier positif $p \geq 2$, on pose

$$H_{n,p} = \sum_{r=0}^{n}(r+1)^{p-2}c_{r,p}.$$

3. Soit $p \geq 2$, prouvez l'inégalité

$$A_{n,p} \leq npH_{n,p} + \sum_{k=2}^{p-2} A_{n,k}A_{n,p-k}.$$

(on pourra considérer, pour chaque couple d'entiers $(m, r) \in [1, p[\times[0, n[$, l'ensemble $E_{m,r}$ des p-uplets d'entiers $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p \leq n$ tels que $i_{m+1} - i_m = r = \max_{1 \leq k < p}\{i_{k+1} - i_k\}$).

Le reste de cette partie consiste en deux applications de cette dernière inégalité.

4. Soit p un entier quelconque, on suppose que

$$C = \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)^{p-2}\rho(r) < \infty.$$

Prouvez qu'il existe une constante C_p ne dépendant que de p et de C telle que

$$|M_{n,p}| \leq C_p \max\{n\|T\|_\infty^{p-2}\|T'\|_\infty^2, (n\|T'\|_\infty^2)^{p/2}\}.$$

5. a) On définit par récurrence la suite $(K_p)_{p\geq 0}$ par les relations $K_0 = 0, K_1 = 1$ et, si $p \geq 2$, par la relation de récurrence

$$K_p = \sum_{k=1}^{p-1} K_k K_{p-k}.$$

Prouvez qu'il existe une constante $K \geq 1$ telle que pour tout entier $p \geq 1$, $K_p \leq K^p$ (on montrera que le rayon de convergence de la série entière $K(x) = \sum_{p=0}^{\infty} K_p x^p$ est non nul, directement ou par le calcul de ses coefficients).

b) On définit par récurrence la suite $(L_p)_{p\geq 0}$ par les relations $L_0 = L_1 = 0, L_2 = 1$ et, si $p \geq 3$, par la relation de récurrence $L_p = 2 + \sum_{k=2}^{p-2} L_k L_{p-k}$.
Prouvez que pour tout entier $p \geq 2$, $L_p \leq K_p \leq K^p$.

6. On suppose à présent que la suite associée vérifie $\mathrm{Cov}(Y_0, Y_r) = \mathcal{O}(e^{-ar})$ pour une constante $a > 0$. On suppose de plus que $\|T\|_\infty = 1$ et $\|T'\|_\infty = \sigma$ et que l'entier n vérifie $n\sigma^2 \geq 1$.
a) Soit $p \geq 2$ un entier pair. Prouvez qu'il existe des constantes U et u strictement positives, et telles que $H_{n,p} \leq U u^{p-1}(p-1)!\sigma^2$. Prouvez qu'il existe une constante $V > 0$ telle que pour tout entier pair $p \geq 2$:

$$M_{n,p} \leq (Vp^2\sigma\sqrt{n})^p.$$

b) En déduire qu'il existe des constantes L et M strictement positives, et telles que pour tout réel $t > 0$:

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq t\sigma\sqrt{n}) \leq L\exp(-M\sqrt{t})$$

(on pourra prouver que $\mathbb{P}(|S_n| \geq t\sigma\sqrt{n}) \leq (Vp^2/t)^p$, pour tout nombre réel $t > 0$ et tout entier pair $p \geq 2$; on cherchera une bonne valeur de p pour conclure).

Partie IV.
Estimation fonctionnelle

Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite associée et stationnaire. Soient $h \in \mathbb{R}_*^+, t \in \mathbb{R}$ arbitraires et $u \in C_b^1(\mathbb{R})$ une densité paire et à support compact sur $\mathbb{R}$, on pose

$$f_{n,h}(t) = \frac{1}{nh}\sum_{k=1}^{n} u\left(\frac{Y_k - t}{h}\right).$$

On suppose dans toute la suite que

(H) Pour tout entier $k \geq 1$, la variable aléatoire bidimensionnelle (Y_0, Y_k) admet une densité f_k et cette densité est uniformément bornée par une constante F (indépendante de k).

L'objet de cette partie est l'étude du comportement asymptotique de $f_{n,h}(t)$.
Soient t et $h > 0$ des réels fixés, on note

$$T(y) = \frac{1}{nh}\left(u\left(\frac{y-t}{h}\right) - \mathbb{E}u\left(\frac{Y_0 - t}{h}\right)\right)$$

utilisant les notations de la partie III on posera, par exemple, $S_{n,h} = f_{n,h}(t) - \mathbb{E}f_{n,h}(t)$, $M_{n,p} = \mathbb{E}S_{n,h}^p$, etc...

A.
Suites satisfaisant la condition (H)

1. Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de v.a. gaussiennes $\mathcal{N}(0,1)$ équidistribuée et indépendantes. Ici, $(X_n)_{n\geq 0}$ désigne la suite stationnaire construite lors de la question **II-B-2** à l'aide de ces variables; si $a_0 \neq 0$, prouvez que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ satisfait à la condition **(H)**.

Donnez une condition sur la fonction G et sur la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ pour que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par $Y_n = G(X_n)$ vérifie la condition **(H)** et soit associée.

B.
Inégalités de moments

1. Ici n, h et t sont fixés et satisfont à l'inégalité $nh \geq 1$. Prouvez qu'il existe une constante G_p, que l'on précisera, telle que

$$c_{r,p} \leq G_p \left(\frac{1}{nh}\right)^p \min\{h^2, \frac{\rho(r)}{h^2}\}.$$

En déduire que pour tout entier $p > 2$ pair, si $\mathrm{Cov}(Y_0, Y_n) = \mathcal{O}(n^{-a})$ pour un nombre réel $a > 4(p-1)$, alors il existe une constante H_p indépendante de n et de h telle que

$$nH_{n,p} \leq H_p(nh)^{1-p}.$$

Conclure qu'il existe une constante D_p indépendante de n et de h et telle que

$$\mathbb{E}(f_{n,h}(x) - \mathbb{E}f_{n,h}(x))^p) \leq D_p(nh)^{-p/2}.$$

Soit $(h(n))_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs telle que:

$$\{\forall n \in \mathbb{N}^*, nh(n) \geq 1\}, \quad \lim_{n\to\infty} h(n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} nh(n) = +\infty.$$

On pose, dans toute la suite, $f_n(t) = f_{n,h(n)}(t)$.

2. Soient f une fonction de $C^2(\mathbb{R})$ et $h(n) = n^{-1/5}$. Prouvez que

$$\mathbb{E}f_n(t) - f(t) = \mathcal{O}(n^{-2/5}).$$

En déduire que, sous les conditions de la question **1**, pour tout entier pair $p \geq 2$, on a:

$$\mathbb{E}(f_n(t) - f(t))^p = \mathcal{O}(n^{-2p/5}).$$

3. Soit f une fonction de $C(\mathbb{R})$, on fixe t dans $\mathbb{R}$ et un nombre $0 < \eta < 1$. On pose ici $h(n) = n^{-\eta}$. Prouvez que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f_n(t) = f(t)$.

En déduire qu'il existe $a > 0$ tel que si $\mathrm{Cov}(Y_0, Y_r) = \mathcal{O}(r^{-a})$ alors presque sûrement, $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$.

C.
Inégalités exponentielles

On suppose à présent que la suite associée satisfait de plus, pour une constante $a > 0$,

$$\mathrm{Cov}(Y_0, Y_r) = \mathcal{O}(e^{-ar}).$$

1. a) Soit $p > 2$ un entier fixé. Montrez qu'il existe une constante $B > 0$ vérifiant

$$nH_{n,p} \leq \left(\frac{Bp}{nh}\right)^{p-1}.$$

En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$|M_{n,p}| \leq \left(\frac{Cp^2}{\sqrt{nh}}\right)^p.$$

b) Utilisez les résultats précédents pour prouver qu'il existe des constantes F et G telles que pour tout nombre réel t, tout entier n et toute suite réelle $h(n) > 0$ telle que $nh(n) \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(|f_n(t) - \mathbb{E}f_n(t)| > \frac{\lambda}{\sqrt{nh}}\right) \leq F\exp(-G\sqrt{\lambda}).$$

c) Soit $M > 0$ un nombre réel fixé. Prouvez qu'il existe des constantes H, K et $L \geq 0$ telles que pour tout entier n et toute suite de réels telle que $nh(n) \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{|t|\leq M} |f_n(t) - \mathbb{E}f_n(t)| > \frac{\lambda}{\sqrt{nh}}\right) \leq Hn^K \exp(-L\sqrt{\lambda}).$$

2. Si $\lim_{n\to\infty} nh(n)/\log^4 n = \infty$, prouvez que, presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t|\leq M} |f_n(t) - \mathbb{E}f_n(t)| = 0.$$

3. Si de plus f est une fonction de $C^2(\mathbb{R})$, prouvez qu'il existe une suite $h(n)$ telle que presque sûrement,

$$\sup_{|t|\leq M} |f_n(t) - \mathbb{E}f_n(t)| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\log^4 n}{n}\right)^{2/5}\right).$$

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Ce problème a pour objet l'étude de quelques aspects de la théorie des traces qui est un des modèles les plus étudiés du parallélisme.

Dans tout le problème, A désigne un alphabet fini. Un mot u sur A est une suite finie $(a_1, \ldots, a_n)$. Ce mot sera noté simplement $u = a_1 \ldots a_n$ si aucune confusion n'est possible. L'entier n est la longueur du mot u, notée $|u|$. Le mot vide, noté 1, est l'unique mot de longueur nulle. Pour toute lettre a de A, le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot u est noté $|u|_a$. Le sous-ensemble de A constitué des lettres ayant au moins une occurrence dans le mot u est appelé alphabet du mot u et est noté $\mathrm{alph}(u)$. L'ensemble de tous les mots sur un alphabet A muni de l'opération binaire de concaténation (i.e. de "mise bout à bout") a une structure de monoïde dont l'élément neutre est le mot vide. C'est le monoïde libre engendré par A, noté A^*. La concaténation de $u, v \in A^*$ est notée simplement uv.

On munit A d'une relation $I \subseteq A \times A$ anti-réflexive et symétrique, dite relation d'indépendance. Le complémentaire de I est la relation de dépendance $D = (A \times A) \setminus I$. Intuitivement deux actions indépendantes peuvent être exécutées simultanément par des processeurs distincts. Deux sous-ensembles B et C de A sont dits indépendants si $B \times C \subseteq I$. Deux mots $u, v \in A^*$ sont dits indépendants si leurs alphabets $\mathrm{alph}(u)$ et $\mathrm{alph}(v)$ le sont. Par abus de notation, on note alors simplement $(u, v) \in I$.

La relation I induit une relation binaire R sur A^* définie par :

$$R = \{(uabv, ubav) \mid u, v \in A^*, (a, b) \in I\}$$

La clôture réflexive et transitive de la relation R est notée $\sim_I$ ou simplement $\sim$. Deux mots u, v de A^* vérifiant $u \sim_I v$ sont dits $\sim_I$-équivalents ou simplement équivalents.

Exemple 1 : Soit $A = \{a, b, c, d\}$ et $I = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$. Nous avons alors $aabcbcd \sim_I baaccbd \sim_I aabbccd$. Les mots $acaa$ et bb sont indépendants, par contre les mots $acaa$ et bd ne le sont pas.

On note $\mathbb{M}$(A,I) le quotient du monoïde libre A^* par la relation d'équivalence $\sim_I$. Un élément de $\mathbb{M}$(A,I) est appelé trace et $\mathbb{M}$(A,I) est le monoïde des traces engendré par A et I.

1 Combinatoire

1. Soient u, v deux mots équivalents. Montrer que $|u|_a = |v|_a$ pour toute lettre a de A et que $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ et $|u| = |v|$.

2. Si $B \subseteq A$, on note Π_B la projection de A^* sur B^* effaçant toutes les lettres n'appartenant pas à B. Montrer que deux mots sont équivalents si et seulement si $\Pi_{\{a,b\}}(u) = \Pi_{\{a,b\}}(v)$ pour tout couple $(a, b) \in D$.

3. En déduire un algorithme linéaire en la longueur du mot pour décider si deux mots sont équivalents.

4. Montrer que si u, v, x et y sont des mots vérifiant $xuy \sim_I xvy$ alors $u \sim_I v$.

5. Soit u un mot. Une lettre a est dite minimale dans u, on note alors $a \in \min(u)$, si $u = u'au''$ avec $(a, u') \in I$. Montrer que $a \in \min(u)$ si et seulement si :

$$\forall b \in A, (a, b) \in D \Longrightarrow \Pi_{\{a,b\}}(u) \text{ commence par la lettre } a$$

6. Déterminer un algorithme qui énumère tous les mots équivalents à un mot donné. Quelle est la complexité de cet algorithme dans le pire des cas?

2 Formes normales

On munit maintenant l'alphabet A d'une relation d'ordre total $<$. Cette relation définit une relation d'ordre total sur A^* (notée encore $<$ par abus de notation), dit ordre lexicographique, par $u < v$ si ou bien $v = uw$ avec $w \neq 1$ ou bien $u = xay, v = xbz$ avec $a, b \in A$ et $a < b$. Un mot u est dit sous forme

normale lexicographique (fnl en abrégé) s'il est plus petit que tout autre mot équivalent :

$$\forall v \in A^*, u \sim_I v \Longrightarrow u = v \text{ ou } u < v$$

1. Déterminer un algorithme linéaire en la longueur du mot calculant l'unique mot sous fnl équivalent à un mot donné.

Un mot non vide u est dit sous forme normale de Foata (fnf en abrégé) si $u = u_1 \dots u_n$ avec, pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$:

F0 $\forall a \in \text{alph}(u_i), |u_i|_a = 1$

F1 $\forall a, b \in \text{alph}(u_i), a = b$ ou $(a, b) \in I$

F2 u_i est un mot sous fnl

F3 si $i \geq 2$, $\forall b \in \text{alph}(u_i)$, $\exists a \in \text{alph}(u_{i-1})$ tel que $(a, b) \in D$

2. Un mot sous fnl est-il toujours sous fnf? Et réciproquement?
3. Montrer qu'il existe un unique mot sous fnf équivalent à un mot donné.
4. Déterminer un algorithme linéaire en la longueur du mot calculant l'unique mot sous fnf équivalent à un mot donné.

3 Reconnaissables

Soit M un monoïde d'élément neutre 1_M.

Un sous-ensemble $X \subseteq M$ est dit reconnaissable s'il existe un morphisme η de M dans un monoïde fini S et un sous-ensemble $F \subseteq S$ tels que $X = \eta^{-1}(F)$. On dira aussi que le morphisme η reconnaît X. L'ensemble des sous-ensembles reconnaissables de M est noté $\text{Rec}(M)$.

La concaténation de $K, L \subseteq M$ est définie par :

$$KL = \{kl \mid k \in K, l \in L\}$$

et l'itération de $K \subseteq M$ par :

$$K^* = \bigcup_{n \geq 0} K^n \text{ où } K^0 = \{1_M\} \text{ et } K^{n+1} = K^n K \text{ pour tout } n \geq 0$$

L'ensemble des parties rationnelles de M, noté $\mathrm{Rat}(M)$, est la plus petite famille de parties contenant les parties finies et close par union, concaténation et itération.

Le théorème de Kleene assure que dans le monoïde libre, les langages rationnels et les langages reconnaissables coïncident : $\mathrm{Rec}(A^*) = \mathrm{Rat}(A^*)$.

Cette partie du problème et la suivante ont pour objet d'établir un équivalent de ce théorème pour les monoïdes de traces.

D'après la question 1.1 on peut définir sans ambiguité l'alphabet d'une trace et son nombre d'occurrences d'une lettre donnée, on étend alors les notations alph( ), $|\ |$ et $|\ |_a$ aux éléments de $\mathbb{M}$(A,I). Si $u, v \in \mathbb{M}(A, I)$ sont deux traces, on notera encore $(u, v) \in I$ si $\mathrm{alph}(u)$ et $\mathrm{alph}(v)$ sont indépendants.

Une trace $t \in \mathbb{M}(A, I)$ est dite connexe si la relation de dépendance D restreinte à $\mathrm{alph}(t)$, c'est à dire le graphe $(\mathrm{alph}(t), D \cap (\mathrm{alph}(t) \times \mathrm{alph}(t)))$, est un graphe connexe. La notion de mot connexe est définie de manière analogue. Soit φ la surjection canonique de A^* sur $\mathbb{M}$(A,I). Si l'on reprend l'exemple 1 ci-dessus, les traces $\varphi(abccbd)$ et $\varphi(bdd)$ sont connexes alors que $\varphi(abccb)$ et $\varphi(cbb)$ ne le sont pas.

Une composante connexe d'une trace t est une trace connexe non vide u telle que $t = uv$ avec $(u, v) \in I$. Si $T \subseteq \mathbb{M}(A, I)$ est un langage de traces, on note $\mathrm{c}(T)$ l'ensemble de toutes les composantes connexes des éléments de T.

Sur $\mathbb{M}(A, I)$, l'itération concurrente c-$*$ est alors définie pour tout langage de traces $T \subseteq \mathbb{M}(A, I)$, par $T^{c-*} = (c(T))^*$. L'ensemble des langages $c-$rationnels de $\mathbb{M}$(A,I), noté $\mathrm{c-Rat}(\mathbb{M}(A, I))$, est la plus petite famille de langages de $\mathbb{M}$(A,I) contenant les langages finis et close par les opérations d'union, concaténation et itération concurrente.

1. Soit $T \subseteq \mathbb{M}(A, I)$ un langage de traces. Si $u \in \mathbb{M}(A, I)$ est une trace, on note $u^{-1}T$ l'ensemble $\{v \in \mathbb{M}(A, I) \mid uv \in T\}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

   (i) Le langage T est reconnaissable.

   (ii) L'ensemble $\varphi^{-1}(T)$ est un langage reconnaissable de A^*.

   (iii) La famille $\{u^{-1}T \mid u \in \mathbb{M}(A, I)\}$ est finie.

2. Un morphisme η défini sur $\mathbb{M}$(A,I) est dit alphabétique si alph(u) = alph(v) dès que $\eta(u) = \eta(v)$. Montrer qu'un langage de traces est reconnaissable si et seulement si il est reconnu par un morphisme alphabétique.

3. Montrer que si T est un langage reconnaissable, le langage c(T) est encore reconnaissable.

4. On note FNL l'ensemble de tous les mots de A^* sous forme normale lexicographique (cf partie 2). Montrer que FNL est un langage reconnaissable de A^*.

5. Soit w un mot de FNL tel que w^2 soit aussi dans FNL. Montrer que w est connexe.

6. Montrer que Rec$(\mathbb{M}(A, I)) \subseteq$ c$-$Rat$(\mathbb{M}(A, I))$.

4 Rang

On veut maintenant démontrer réciproquement que tout langage de c$-$Rat$(\mathbb{M}(A, I))$ est dans Rec$(\mathbb{M}(A, I))$.

1. Soient $x, y, u_0, \ldots, u_n$ $n+3$ mots de A^*. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

   (i) $xy \sim u_0 \ldots u_n$.

   (ii) Il existe des mots $x_0, \ldots, x_n$, $y_0, \ldots, y_n$ tels que :

   - $x \sim x_0 \ldots x_n$, $y \sim y_0 \ldots y_n$
   - $u_i \sim x_i y_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$
   - $(y_i, x_{i+1} \ldots x_n) \in I$ pour tout $0 \leq i < n$

Soient $x, y \in A^*$ et L un langage de A^*. D'après la question précédente, le produit xy est équivalent à un élément de L s'il existe des mots $x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n$ de A^* tels que $x \sim_I x_0 \ldots x_n$, $y \sim_I y_0 \ldots y_n$, $x_0 y_0 x_1 y_1 \ldots x_n y_n \in L$ et $(y_i, x_{i+1} \ldots x_n) \in I$ pour tout $0 \leq i < n$. On définit alors rang(x, y, L) comme étant le plus petit entier n pour lequel une

telle factorisation est possible. Le rang (fini ou infini) d'un langage $L \subseteq A^*$ est alors

$$\text{rang}(L) = \max\{\text{rang}(x, y, L) \mid x, y \in A^*, xy \in \varphi^{-1}(\varphi(L))\}$$

Un langage $L \subseteq A^*$ est dit I-clos (ou simplement clos) si tout mot équivalent à un mot de L est encore dans L.

2. On considère l'alphabet $A = \{a, b\}$ et la relation d'indépendance $I = \{(a, b), (b, a)\}$. Calculer $\text{rang}(\{ab\}^*)$ et $\text{rang}(\{a\}^*\{b\}^*)$.

3. Soient $L_1, L_2 \subseteq A^*$ deux langages I-clos. Montrer que $\text{rang}(L_1 L_2) \leq 1$.

4. Soit $L \subseteq A^*$ un langage I-clos connexe. Montrer que $\text{rang}(L^*) < 2|A|$.

5. Soit $L \subseteq A^*$ un langage reconnaissable de rang fini. Montrer que $\varphi(L)$ est un langage reconnaissable de traces.

6. Que dire de la réciproque de la question précédente?

7. Montrer que $\text{c}-\text{Rat}(\mathbb{M}(A, I)) \subseteq \text{Rec}(\mathbb{M}(A, I))$.

5 Graphes de dépendance

On note ω le cardinal de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. L'addition usuelle dans $\mathbb{N}$ est étendue en posant $\omega + n = n + \omega = \omega$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Pour $a \in A$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, on définit l'ensemble des sommets $V_a(n) = \{(a, i) \mid i < n\}$.

Un graphe de dépendance sur (A, I) est une paire $g = ((n_a)_{a \in A}, E)$ où $n_a \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ pour tout $a \in A$ et $E \subseteq V \times V$ avec $V = \bigcup_{a \in A} V_a(n_a)$ vérifiant les trois conditions :

C1 E est sans cycle : $\forall v \in V, (v, v) \notin E^+$ (où E^+ désigne la clôture transitive de E)

C2 $\forall a, b \in A, \forall x \in V_a(n_a), \forall y \in V_b(n_b)$:

$$(a, b) \in D \iff ((x, y) \in E \text{ ou } (y, x) \in E \text{ ou } x = y)$$

C3 $\forall a \in A, \forall (a,i),(a,j) \in V_a(n_a)$:

$$((a,i),(a,j)) \in E \iff i < j$$

L'ensemble des graphes de dépendance sur (A, I) est noté $\mathbb{G}$(A,I). Le sous-ensemble de $\mathbb{G}$(A,I) constitué des graphes ayant un nombre fini de sommets est noté $\mathbb{F}$(A,I). Pour $g = ((n_a)_{a\in A}, E_g) \in \mathbb{G}(A, I)$, on définit alph$(g) = \{a \in A \mid n_a \neq 0\}$ et alphinf$(g) = \{a \in A \mid n_a = \omega\}$.

On définit une opération de concaténation partielle dans $\mathbb{G}$(A,I) de la manière suivante. Soient $g = ((n_a)_{a\in A}, E_g) \in \mathbb{G}(A, I)$ et $h = ((m_a)_{a\in A}, E_h) \in \mathbb{G}(A, I)$ avec alphinf$(g)\times$alph$(h) \subseteq I$ (cette condition est trivialement vérifiée si $g \in \mathbb{F}(A, I)$), la concaténation de g et h, notée $g \cdot h$ est le graphe de dépendance $f = ((n_a + m_a)_{a\in A}, E_f)$ avec

$$\begin{aligned} E_f = E_g \ &\cup \{((a, n_a + i), (b, n_b + j)) \mid ((a,i),(b,j)) \in E_h\} \\ &\cup \{((a,i),(b,n_b+j)) \mid (a,b) \in D, i < n_a, j < m_b\} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathbb{F}$(A,I) muni de la concaténation $(\cdot)$ est isomorphe à $\mathbb{M}$(A,I).

Soient $g, f \in \mathbb{G}(A, I)$, g est un préfixe de f s'il existe $h \in \mathbb{G}(A, I)$ tel que $f = g \cdot h$. La relation "être préfixe de" est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{G}$(A,I) notée $\leq$.

Soit $(Z, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Un sous-ensemble $Y \subseteq Z$ est cohérent si pour tout $x, y \in Y$ il existe $z \in Z$ tel que $x \leq z$ et $y \leq z$. Un sous-ensemble non vide $Y \subseteq Z$ est dirigé si pour tout $x, y \in Y$ il existe $z \in Y$ tel que $x \leq z$ et $y \leq z$. Un élément $x \in Z$ est premier (resp. compact) si pour tout sous-ensemble (resp. pour tout sous ensemble dirigé) $Y \subseteq Z$ admettant une borne supérieure $\sqcup Y$, $x \leq \sqcup Y$ entraine l'existence d'un élément $y \in Y$ tel que $x \leq y$.

2. Montrer qu'un ensemble $K \subseteq \mathbb{G}(A, I)$ est cohérent si et seulement si il admet une borne supérieure.

3. Caractériser les éléments premiers de $\mathbb{G}(A, I)$ et montrer que tout graphe de dépendance est la borne supérieure de l'ensemble des éléments premiers qui lui sont inférieurs ou égaux.

4. Caractériser les éléments compacts de $\mathbb{G}(A, I)$ et montrer que tout graphe de dépendance est la borne supérieure de l'ensemble des éléments compacts qui lui sont inférieurs ou égaux.

5. Montrer que tout élément de $\mathbb{G}(A, I)$ est la borne supérieure d'une suite croissante d'éléments de $\mathbb{F}(A, I)$.

6 Equations

1. Soit M un monoïde d'élément neutre 1_M. Une longueur est un morphisme γ de M dans $\mathbb{N}$ telle que $\gamma^{-1}(0) = \{1_M\}$. Un monoïde M est finiment engendré s'il existe K fini inclus dans M tel que tout élément de M est produit d'éléments de K. Montrer qu'un monoïde finiment engendré M muni d'une longueur est isomorphe à un monoïde de traces si et seulement si, pour tout $x, y, z, t \in M$, l'égalité $xy = zt$ entraîne l'existence de $p, q, r, s \in M$ tels que $x = pq$, $y = rs$, $z = pr$, $t = qs$ et $qr = rq$.

2. Soit M un monoïde. Deux éléments u et v de M sont dits conjugués s'il existe w dans M tel que $uw = wv$. Les éléments u et v sont dits transposés s'il existe x, y dans M tels que $u = xy$ et $v = yx$.

   (a) Montrer que les notions de conjugaison et de transposition coïncident si M est un monoïde libre.

   (b) Donner un exemple de monoïde de traces où ces deux notions sont distinctes.

   (c) Montrer que dans un monoïde de traces, la conjugaison est la clôture transitive de la relation de transposition.

Soit $X = \{x, y\}$ avec $x \neq y$ un alphabet de 2 lettres. Une équation $e = f$ sur X est une paire de mots distincts $e, f \in X^*$. Une solution de $e = f$ dans $\mathbb{M}(A, I)$ est un morphisme $\theta : X^* \longrightarrow \mathbb{M}(A, I)$ telle que $\theta(e) = \theta(f)$. Si une solution θ est définie par $\theta(x) = u$ et $\theta(y) = v$, on écrit simplement que (u, v) est une solution de $e = f$ (dans $\mathbb{M}(A, I)$). Une solution (u, v) est dite cyclique s'il existe une trace t telle que $u, v \in t^*$ (i.e. sont des puissances de t).

3. Soit (u, v) une solution de $e = f$ dans $\mathbb{M}(A, I)$. Montrer que (u, v) est cyclique dès que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

   (i) $\mathbb{M}$(A,I) est libre c'est à dire $I = \emptyset$.

   (ii) Il existe des nombres entiers $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha|u|_a = \beta|v|_a$ pour toute lettre a de A.

4. Soit (u, v) une solution de l'équation $e = f$. Soit u' (resp. v') une composante connexe de u (resp. de v). Montrer que ou bien $\text{alph}(u') = \text{alph}(v')$ ou bien $(u', v') \in I$.

5. Soit (u, v) une solution de l'équation $e = f$. Montrer qu'il existe des traces deux à deux indépendantes et connexes $t_1, \ldots, t_k$ telles que $u, v \in t_1^* \ldots t_k^*$.